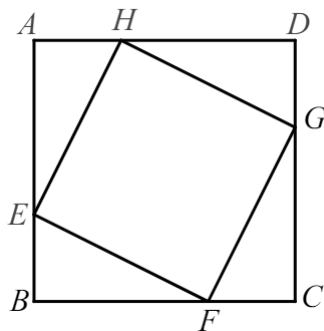


第3讲面积、线段、角度问题（练习）

一、面积问题

1. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为6，在各边上顺次截取 $AE = BF = CG = DH = 4$ ，则四边形 $EFGH$ 的面积为_____。



【答案】 20

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ, AB = BC = CD = DA,$$

$$\therefore AE = BF = CG = DH,$$

$$\therefore AH = BE = CF = DG.$$

在 $\triangle AEH$ 、 $\triangle BFE$ 、 $\triangle CGF$ 和 $\triangle DHG$ 中，

$$\begin{cases} AE = BF = CG = DH \\ \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ, \\ AH = BE = CF = DG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEH \cong \triangle BFE \cong \triangle CGF \cong \triangle DHG \text{ (SAS)},$$

$$\therefore EH = FE = GF = GH, \angle AEH = \angle BFE,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是菱形，

$$\therefore \angle BEF + \angle BFE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BEF + \angle AEH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HEF = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是正方形，

$$\therefore AB = BC = CD = DA = 6, AE = BF = CG = DH = 4,$$

$$\therefore AH = BE = DG = CF = 2,$$

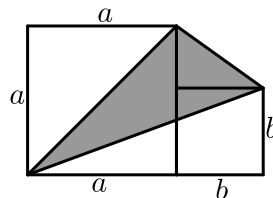
$$\therefore EH = FE = GF = GH = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore \text{四边形} EFGH \text{ 的面积是: } 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 20.$$

故答案为：20．

【标注】【知识点】正方形的周长与面积

2. 如图所示，边长分别为 a ， b 的两个正方形拼在一起，用代数式表示图中阴影部分的面积（化为最简）_____．

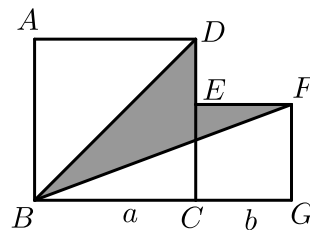


【答案】 $\frac{1}{2}a^2$

【解析】
$$\begin{aligned} S_{\text{阴}} &= a^2 + b^2 + \frac{1}{2}(a-b) \cdot b - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot b \\ &= a^2 + b^2 + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}b^2 \\ &= \frac{1}{2}a^2. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】列代数式

3. 如图，已知正方形 $ABCD$ 与正方形 $CEFG$ 的边长分别为 a 、 b ，如果 $a+b=20$ ， $ab=18$ ，则阴影部分的面积为_____．



【答案】173

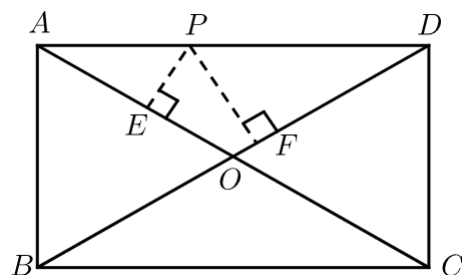
【解析】
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}a^2 + b^2 - \frac{1}{2}(a+b)b \\ &= \frac{1}{2}a^2 + b^2 - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}b^2 \\ &= \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}ab \\ &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - ab) \\ &= \frac{1}{2}(a+b)^2 - \frac{3}{2}ab, \end{aligned}$$

当 $a+b=20$ ， $ab=18$ 时，

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{2} \times 400 - \frac{3}{2} \times 18 \\ &= 200 - 27 = 173 . \\ \text{故答案为} &: 173 .\end{aligned}$$

【标注】【知识点】正方形的周长与面积

4. 如图， P 是矩形 $ABCD$ 的边 AD 上一个动点， $PE \perp AC$ 于 E ， $PF \perp BD$ 于 F ，当 P 从 A 向 D 运动（ P 与 A ， D 不重合），则 $PE + PF$ 的值（ ）



- A. 增大 B. 减小 C. 不变 D. 先增大再减小

【答案】C

【解析】如图，过 A 作 $AG \perp BD$ 于 G ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore OA = OD$ ，

则， $S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} OD \cdot AG$ ，

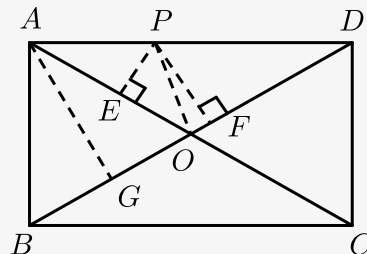
$S_{\triangle AOP} + S_{\triangle POD} = \frac{1}{2} AO \cdot PE + \frac{1}{2} DO \cdot PF = \frac{1}{2} DO \cdot (PE + PF)$ ， $\because$

$S_{\triangle AOD} = S_{\triangle AOP} + S_{\triangle POD}$ ，

$\therefore PE + PF = AG$ ，

$\therefore PE + PF$ 的值是定值，

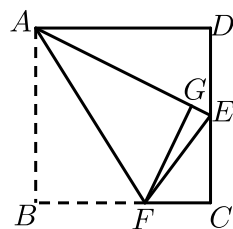
故选C。



【标注】【知识点】动点与特殊平行四边形问题

5.

如图，在正方形纸片 $ABCD$ 中， E 是 CD 的中点，将正方形纸片折叠，点 B 落在线段 AE 上的点 G 处，折痕为 AF ．若 $AD = 4\text{cm}$ ，则 CF 的长为 _____ cm ．



【答案】 $(6 - 2\sqrt{5})$

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ, AD = AB = CD = BC = 4\text{cm},$$

$\because E$ 是 CD 的中点，

$$\therefore DE = EC = \frac{1}{2}CD = 2\text{cm},$$

由折叠的性质知， $AG = AB = 4\text{cm}$ ， $FG = BF$ ， $\angle EGF = \angle AGF = \angle B = 90^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中，由勾股定理，

$$\text{得 } AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}\text{cm},$$

$$\therefore GE = (2\sqrt{5} - 4)\text{cm},$$

设 $CF = x\text{cm}$ ，则 $BF = FG = (4 - x)\text{cm}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle EFC$ 中，由勾股定理，

$$\text{得 } EF = \sqrt{CF^2 + CE^2} = \sqrt{x^2 + 4}\text{cm},$$

在 $\text{Rt}\triangle GEF$ 中，由勾股定理，

$$\text{得 } EG^2 + FG^2 = EF^2,$$

$$\text{即 } (2\sqrt{5} - 4)^2 + (4 - x)^2 = x^2 + 4,$$

$$\text{解得 } x = 6 - 2\sqrt{5},$$

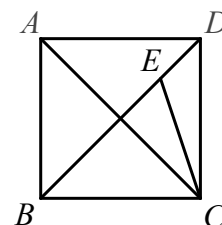
$$\therefore CF \text{ 的长为 } (6 - 2\sqrt{5})\text{cm}.$$

故答案为： $(6 - 2\sqrt{5})$ ．

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

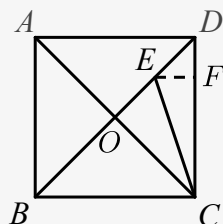
二、线段问题

6. 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 $\sqrt{2}$ ，连接 AC 、 BD ， CE 平分 $\angle ACD$ 交 BD 于点 E ，则 $DE =$ _____ ．



【答案】 $2 - \sqrt{2}$

【解析】 过 E 作 $EF \perp DC$ 于 F ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形 ,

$\therefore AC \perp BD$,

$\because CE$ 平分 $\angle ACD$ 交 BD 于点 E ,

$\therefore EO = EF$,

$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 $\sqrt{2}$,

$\therefore AC = \sqrt{2 + 2} = 2$,

$\therefore CO = \frac{1}{2}AC = 1$,

$\therefore CF = CO = 1$,

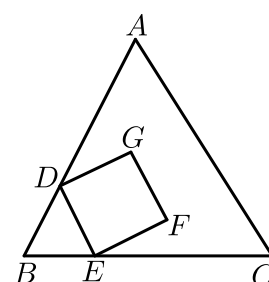
$\therefore EF = DF = DC - CF = \sqrt{2} - 1$,

$\therefore DE = \sqrt{DF^2 + EF^2} = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2 + (\sqrt{2} - 1)^2} = 2 - \sqrt{2}$.

故答案为 : $2 - \sqrt{2}$.

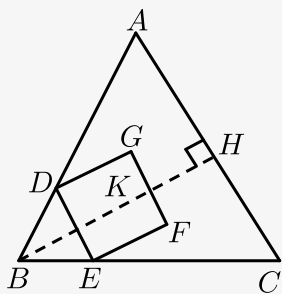
【标注】 【知识点】 正方形的性质

7. 如图为等边三角形 ABC 与正方形 $DEFG$ 的重叠情形 , 其中 D , E 两点分别在 AB , BC 上 , 且 $BD = BE$. 若 $AC = 18$, $GF = 6$, 则点 F 到 AC 的距离为 _____ .



【答案】 $6\sqrt{3} - 6$

【解析】 如图，过点 B 作 $BH \perp AC$ 于 H ，交于 GF 于 K ，



$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore \angle A = \angle ABC = 60^\circ$ ，

$\therefore BD = BE$ ，

$\therefore \triangle BDE$ 是等边三角形，

$\therefore \angle BDE = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle A = \angle BDE$ ，

$\therefore AC \parallel BE$ ，

$\therefore$ 四边形 $DEFG$ 是正方形， $GF = 6$ ，

$\therefore DE \parallel GF$ ，

$\therefore AC \parallel DE \parallel GF$ ，

$\therefore KH = 18 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 6 = 9\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 6 = 6\sqrt{3} - 6$

$\therefore F$ 点到的距离为 $6\sqrt{3} - 6$ 。

【标注】 【知识点】 正方形的性质

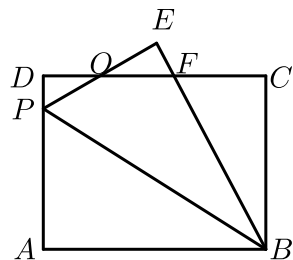
【知识点】 等边三角形的判定

【知识点】 等边三角形的性质

【知识点】 探究特殊角的三角函数值

【能力】 推理论证能力

8. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 8$ ， $BC = 6$ ， P 为 AD 上一点，将 $\triangle ABP$ 沿 BP 翻折至 $\triangle EBP$ ， PE 与 CD 相交于点 O ，且 $OE = OD$ ，则 AP 的长为 _____。

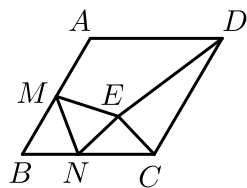


【答案】 $\frac{24}{5}$

【解析】 使得 AP 的长为 x ，则 $PE = x$ ， $DP = 6 - x$ ，
 $\because \angle D = \angle A = \angle E = 90^\circ$ ， $OD = OE$ ， $\angle DOP = \angle EOF$ ，
 $\therefore \triangle DOP \cong \triangle EOF$ ，
 $\therefore PO = FO$ ， $DP = EF = 6 - x$ ，
 $\therefore DF = OD + FO = PO + EO = PE = x$ ，
 $\therefore BF = BE - EF = 8 - (6 - x) = 2 + x$ ， $FC = 8 - x$ ，
在 $\text{Rt}\triangle BCF$ 中， $BC^2 + FC^2 = BF^2$ ，即 $6^2 + (8 - x)^2 = (2 + x)^2$ 。
解得 $x = \frac{24}{5}$ ，即 $AP = \frac{24}{5}$ 。

【标注】 【知识点】 翻折问题与勾股定理

9. 在菱形 $ABCD$ 中， $\angle B = 60^\circ$ ， $BC = 2\text{cm}$ ， M 为 AB 的中点， N 为 BC 上一动点（不与点 B 重合），将 $\triangle BMN$ 沿直线 MN 折叠，使点 B 落在点 E 处，连接 DE ， CE ，当 $\triangle CDE$ 为等腰三角形时，线段 BN 的长为 _____。



【答案】 $\frac{4}{5}\text{cm}$ 或 2cm

【解析】 分两种情况：

① 当 $DE = DC$ 时，连接 DM ，作 $DG \perp BC$ 于 G ，如图1所示：

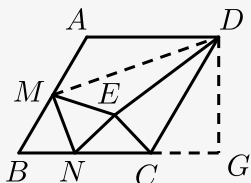


图 1

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，
 $\therefore AB = CD = BC = 2\text{cm}$ ， $AD \parallel BC$ ， $AB \parallel CD$ ，
 $\therefore \angle DCG = \angle B = 60^\circ$ ， $\angle A = 120^\circ$ ，
 $\therefore DE = AD = 2\text{cm}$ ，
 $\therefore DG \perp BC$ ，

$$\therefore \angle CDG = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ ,$$

$$\therefore CG = \frac{1}{2}CD = 1 ,$$

$$\therefore DG = \sqrt{3}CG = \sqrt{3}\text{cm} , BG = BC + CG = 3\text{cm} ,$$

$\therefore M$ 为 AB 的中点 ,

$$\therefore AM = BM = 1\text{cm} ,$$

由折叠的性质得 : $EN = BN$, $EM = BM = AM$, $\angle MEN = \angle B = 60^\circ$,

$$\text{在}\triangle ADM\text{和}\triangle EDM\text{中} , \begin{cases} AD = ED \\ AM = EM \\ DM = DM \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADM \cong \triangle EDM (\text{SSS}) ,$$

$$\therefore \angle A = \angle DEM = 120^\circ ,$$

$$\therefore \angle MEN + \angle DEM = 180^\circ ,$$

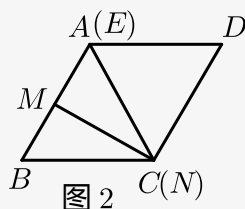
$\therefore D$ 、 E 、 N 三点共线 ,

$$\text{设 } BN = EN = x\text{cm} , \text{ 则 } GN = (3 - x)\text{cm} , DN = (x + 2)\text{cm} ,$$

$$\text{在Rt}\triangle DGN\text{中} , \text{ 由勾股定理得 : } (3 - x)^2 + (\sqrt{3})^2 = (x + 2)^2 ,$$

$$\text{解得 : } x = \frac{4}{5}\text{cm} , \text{ 即 } BN = \frac{4}{5}\text{cm} ,$$

②当 $CE = CD$ 时 , $CE = CD = AD$, 此时点 E 与 A 重合 , N 与点 C 重合 , 如图2所示 :



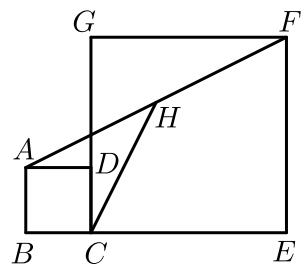
$CE = CD = DE = DA$, $\triangle CDE$ 是等边三角形 , $BN = BC = 2\text{cm}$ (含 $CE = DE$ 这种情况) ;

综上所述 , 当 $\triangle CDE$ 为等腰三角形时 , 线段 BN 的长为 $\frac{4}{5}\text{cm}$ 或 2cm .

故答案为 : $\frac{4}{5}\text{cm}$ 或 2cm .

【标注】【知识点】四边形与折叠问题

10. 如图 , 正方形 $ABCD$ 和正方形 $CEFG$ 中 , 点 D 在 CG 上 , $BC = 1$, $CE = 3$, H 是 AF 的中点 , 那么 CH 的长是 () .



A. 2.5

B. $\sqrt{5}$

C. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

D. 2

【答案】 B

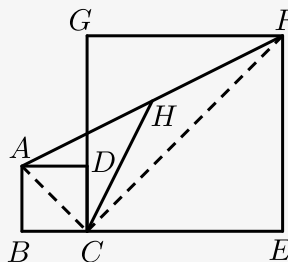
【解析】 如图，连接 AC ， CF 。

$\because$ 正方形 $ABCD$ 和正方形 $CEFG$ 中， $BC = 1$ ， $CE = 3$ ，

$\therefore AC = \sqrt{2}$ ， $CF = 3\sqrt{2}$ ， $\angle ACD = \angle GCF = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle ACF = 90^\circ$ 。

由勾股定理得，



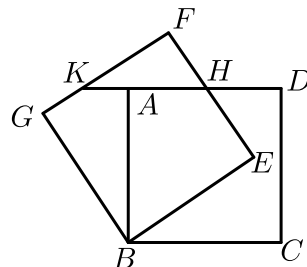
$$AF = \sqrt{AC^2 + CF^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{5}.$$

$\because H$ 是 AF 的中点，

$$\therefore CH = \frac{1}{2}AF = \sqrt{5}.$$

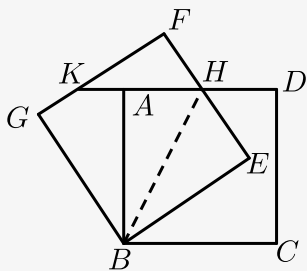
【标注】 【知识点】勾股定理的综合应用

11. 如图，正方形 $ABCD$ 绕点 B 逆时针旋转 30° 后得到正方形 $BEFG$ ， EF 与 AD 相交于点 H ，延长 DA 交 GF 于点 K 。若正方形 $ABCD$ 边长为 $\sqrt{3}$ ，则 $AK = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 $2\sqrt{3} - 3$

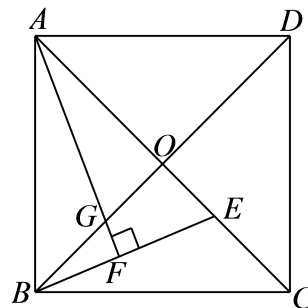
【解析】 连接 BH ，如图所示：



$\because$ 四边形 $ABCD$ 和 四边形 $BEFG$ 是正方形 ,
 $\therefore \angle BAH = \angle ABC = \angle BEH = \angle F = 90^\circ$,
 由旋转的性质得 : $AB = EB$, $\angle CBE = 30^\circ$,
 $\therefore \angle ABE = 60^\circ$,
 在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 和 $\text{Rt}\triangle EBH$ 中 ,
 $\therefore BH = BH$, $AB = EB$,
 $\therefore \text{Rt}\triangle ABH \cong \text{Rt}\triangle EBH$ (HL) ,
 $\therefore \angle ABH = \angle EBH = \frac{1}{2} \angle ABE = 30^\circ$, $AH = EH$,
 $\therefore AH = AB \cdot \tan \angle ABH = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 1$,
 $\therefore EH = 1$,
 $\therefore FH = \sqrt{3} - 1$,
 在 $\text{Rt}\triangle FKH$ 中 , $\angle FKH = 30^\circ$,
 $\therefore KH = 2FH = 2(\sqrt{3} - 1)$,
 $\therefore AK = KH - AH = 2(\sqrt{3} - 1) - 1 = 2\sqrt{3} - 3$.

【标注】【知识点】四边形与旋转问题

12. 如图 , 正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O , $AB = 3\sqrt{2}$, E 为 OC 上一点 , $OE = 1$, 连接 BE , 过点 A 作 $AF \perp BE$ 于点 F , 与 BD 交于点 G , 则 BF 的长是 _____ .



【答案】 $\frac{3\sqrt{10}}{5}$

【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$$\therefore AO = OB = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3$$

,

$AO \perp OB$,

∴ 在 $\triangle ABF$ 中，

$$AF^2 + BF^2 = AB^2,$$

在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中，

$$AF^2 + EF^2 = AE^2,$$

在 $\text{Rt}\triangle BOE$ 中， $BO^2 + OE^2 = BE^2$ ，

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle BOE \text{ 中，} BE = \sqrt{BO^2 + OE^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10},$$

∴ 设 $BF = x$ ，

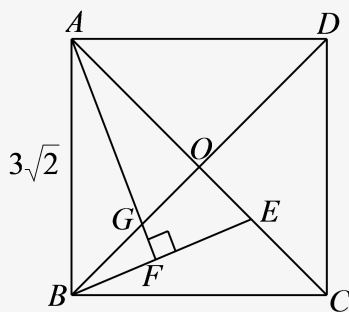
$$\therefore AB^2 - BF^2 = AE^2 - EF^2,$$

$$\text{即 } (3\sqrt{2})^2 - x^2 = 4^2 - (\sqrt{10} - x)^2,$$

$$18 - x^2 = 16 - (10 - 2\sqrt{10}x + x^2)$$

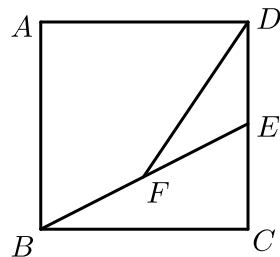
$$18 - x^2 = 6 + 2\sqrt{10}x - x^2$$

$$\therefore x = \frac{3\sqrt{10}}{5}.$$



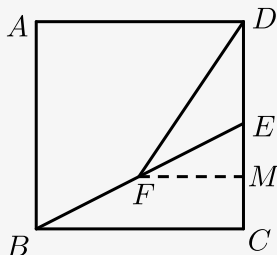
【标注】【知识点】正方形的性质；方程思想在勾股定理的应用

13. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 是 CD 中点，点 F 是 BE 的中点，若 $AB = 4$ ，则 $DF =$ _____.



【答案】 $\sqrt{13}$

【解析】如图，作 $FM \perp CD$ 于 M ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形 ,
 $\therefore AB = BC = CD = 4$, $\angle C = \angle FME = 90^\circ$,
 $\therefore FM \parallel BC$,
 $\therefore BF = EF$,
 $\therefore EM = MC$,
 $\therefore FM = \frac{1}{2}BC = 2$,
 在 $\text{Rt}\triangle DFM$ 中 ,
 $\therefore \angle FMD = 90^\circ$, $FM = 2$,
 $DM = DE + EM = 2 + 1 = 3$,
 $\therefore DF = \sqrt{FM^2 + DM^2} = \sqrt{13}$,
 故答案为 $\sqrt{13}$.

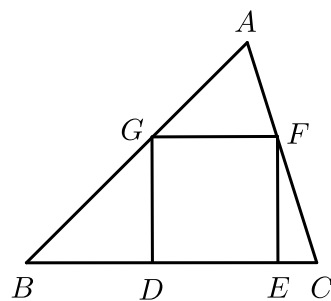
【标注】【知识点】正方形的性质

【知识点】中位线定理及其应用

【知识点】勾股定理

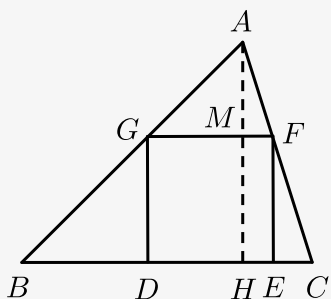
【知识点】直接用勾股求边长

14. 如图 , 已知正方形 $DEFG$ 的顶点 D 、 E 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上 , 顶点 G 、 F 分别在边 AB 、 AC 上 . 如果 $BC = 4$, $\triangle ABC$ 的面积是 6 , 那么这个正方形的边长是 _____ .



【答案】 $\frac{12}{7}$

【解析】作 $AH \perp BC$ 于 H , 交 GF 于 M , 如图 ,



$\because \triangle ABC$ 的面积是6,

$$\therefore \frac{1}{2}BC \cdot AH = 6,$$

$$\therefore AH = \frac{2 \times 6}{4} = 3,$$

设正方形 $DEFG$ 的边长为 x , 则 $GF = x$, $MH = x$, $AM = 3 - x$,

$\because GF \parallel BC$,

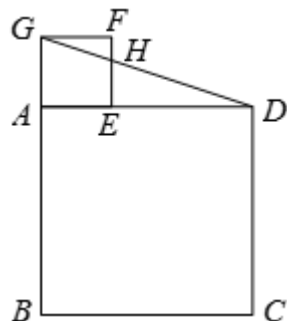
$\therefore \triangle AGF \sim \triangle ABC$,

$$\therefore \frac{GF}{BC} = \frac{AM}{AH}, \text{ 即 } \frac{x}{4} = \frac{3-x}{3}, \text{ 解得 } x = \frac{12}{7},$$

即正方形 $DEFG$ 的边长为 $\frac{12}{7}$.

【标注】【知识点】三角形内接四边形问题

15. 如图, 在正方形 $ABCD$ 和正方形 $AEFG$ 中, 顶点 E 在边 AD 上, 连接 DG 交 EF 于点 H , 若 $FH = 1$, $EH = 2$, 则 DG 的长为 _____.



【答案】 $3\sqrt{10}$

【解析】如图可知,

$$GF \parallel AD, FH = 1, EH = 2,$$

$$\therefore \triangle GFH \sim \triangle DEH,$$

$$\therefore \frac{GF}{ED} = \frac{FH}{HE} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore EF = FH + HE = GF = 3,$$

$$\therefore AG = 3, AD = 9,$$

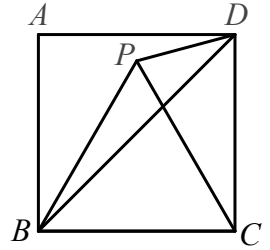
$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle AGD$ 中,

$$DG = \sqrt{AG^2 + AD^2} = 3\sqrt{10}.$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

角度问题

16. 如图，四边形 $ABCD$ 为正方形， $\triangle BPC$ 为等边三角形，连接 PD 、 BD ，则 $\angle BDP = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 30°

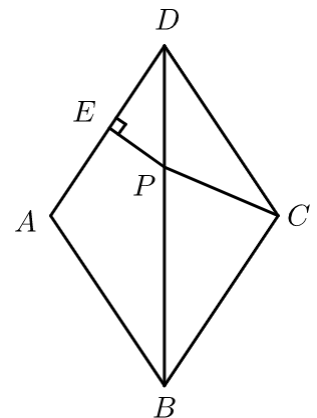
【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形， $\triangle BPC$ 为等边三角形，
 $\therefore BC = DC = CP$ ， $\angle DCB = 90^\circ$ ， $\angle PCB = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle DCP = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ， $\angle CDB = \angle CBD = 45^\circ$ ，
 $\angle CDP = \angle CPD = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$ ，
 $\therefore \angle BDP = \angle CDP - \angle CDB = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$ 。
 故答案为： 30° 。

【标注】 【知识点】 正方形的性质

【知识点】 等腰三角形的性质-等边对等角

【知识点】 等边三角形的性质

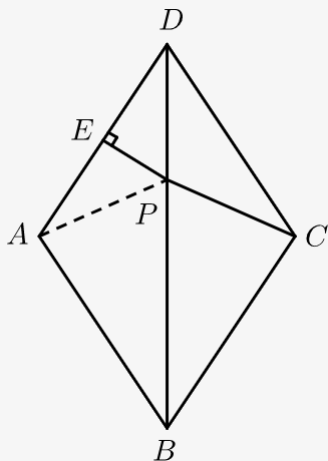
17. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle ADC = 72^\circ$ ， AD 的垂直平分线交对角线 BD 于点 P ，垂足为 E ，连接 CP ，则 $\angle CPB = \underline{\hspace{2cm}}$ 度。



【答案】 72

【解析】连接 AP .

$\because ABCD$ 是
菱形 ,



$$\angle ADC = 72^\circ ,$$

$$\therefore \angle BAD = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ ,$$

$$\angle ADB = \frac{1}{2} \angle ADC = \frac{1}{2} \times 72^\circ = 36^\circ .$$

$\because EP$ 是 AD 垂直平分线 ,

$$\therefore \angle PAD = \angle PDA = 36^\circ ,$$

$$\therefore \angle APB = \angle PAD + \angle PDA = 72^\circ .$$

$\because ABCD$ 是菱形 ,

$$\therefore AB = CB .$$

在 $\triangle PAB$ 和 $\triangle PCB$ 中 ,

$$\begin{cases} AB = CB \\ \angle ABP = \angle CBP , \\ PB = PB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle PAB \cong \triangle PCB \text{ (SAS)} ,$$

$$\therefore \angle APB = \angle CPB = 72^\circ ,$$

故答案为 : 72 .

【标注】【知识点】线段的垂直平分线的性质定理

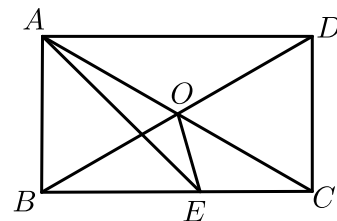
【知识点】SAS

【知识点】全等三角形的性质

【知识点】全等三角形的对应边与角

【知识点】菱形的性质

18. 如图 , 在矩形 $ABCD$ 中 , 对角线 AC 、 BD 相交于点 O , 若 AE 平分 $\angle BAD$ 交 BC 于点 E , 且 $BO = BE$, 连接 OE , 则 $\angle BOE =$ _____ .



【答案】 75° .

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AD \parallel BC, AC = BD, OA = OC, OB = OD, \angle BAD = 90^\circ,$

$\therefore OA = OB, \angle DAE = \angle AEB,$

$\therefore AE$ 平分 $\angle BAD,$

$\therefore \angle BAE = \angle DAE = 45^\circ = \angle AEB,$

$\therefore AB = BE,$

$\therefore BO = BE,$

$\therefore AB = BO = OA.$

$\therefore \triangle BAO$ 是等边三角形,

$\therefore \angle ABO = 60^\circ,$

$\therefore \angle OBE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$

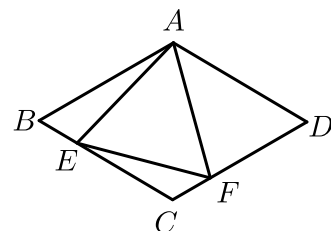
$OB = BE,$

$\therefore \angle BOE = \angle BEO = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$

故答案为 75° .

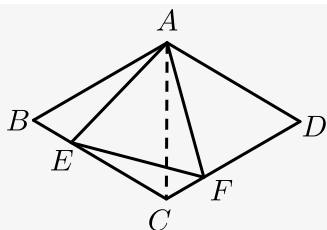
【标注】 【知识点】 角的和差的计算与证明-不需要分类讨论

19. 如图所示, 点 E 、 F 分别是菱形 $ABCD$ 的边 BC 、 CD 上的点, 且 $\angle EAF = \angle D = 60^\circ$, $\angle FAD = 45^\circ$, 则 $\angle CFE =$ _____ 度.



【答案】 45

【解析】 连接 AC ,



$\because$ 菱形 $ABCD$, $\therefore AB = BC$, $\angle B = \angle D = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形 , $\angle BCD = 120^\circ$.

$\therefore AB = AC$, $\angle ACF = \frac{1}{2} \angle BCD = 60^\circ$.

$\therefore \angle B = \angle ACF$,

$\because \triangle ABC$ 为等边三角形 ,

$\therefore \angle BAC = 60^\circ$, 即 $\angle BAE + \angle EAC = 60^\circ$,

又 $\angle EAF = 60^\circ$, 即 $\angle CAF + \angle EAC = 60^\circ$,

$\therefore \angle BAE = \angle CAF$,

在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle ACF$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle B = \angle ACF \\ AB = AC \\ \angle BAE = \angle CAF \end{cases} ,$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACF$ (ASA) ,

$\therefore AE = AF$,

又 $\angle EAF = \angle D = 60^\circ$, 则 $\triangle AEF$ 是等边三角形 ,

$\therefore \angle AFE = 60^\circ$,

又 $\angle AFD = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ$,

则 $\angle CFE = 180^\circ - 75^\circ - 60^\circ = 45^\circ$.

【标注】 【知识点】 ASA

【知识点】 全等三角形的性质

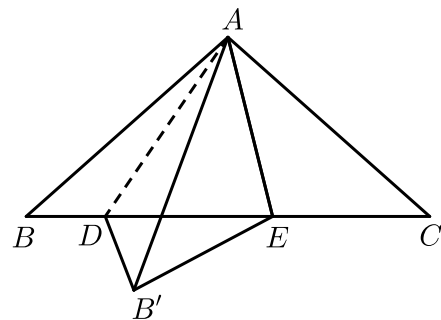
【知识点】 全等三角形的对应边与角

【知识点】 等边三角形的性质

【知识点】 等边三角形的判定

【知识点】 菱形的性质

20. 如图 , 在 $\triangle ABC$ 中 , $AB = AC$, $\angle BAC = 100^\circ$, 点 D 在 BC 边上 , $\triangle ABD$ 沿直线 AD 翻折至 $\triangle AB'D$, $\angle B'AC$ 的角平分线交 BC 边于点 E , 连接 $B'E$. 当 $\triangle B'DE$ 为等腰三角形 , 则 $\angle BAD$ 的度数为 _____ .



【答案】 10° 或 25° 或 40°

【解析】 $\because AB = AC, \angle BAC = 100^\circ,$

$$\therefore \angle B = \angle C = 40^\circ,$$

$\because \triangle ABD$ 翻折至 $\triangle AB'D,$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle AB'D,$$

$$\therefore \angle AB'D = \angle B = 40^\circ, AB = AB',$$

$$\angle BAD = \angle B'AD, \angle ADB = \angle ADB',$$

$$\therefore AB' = AC,$$

$\because AE$ 平分 $\angle B'AC,$

$$\therefore \angle B'AE = \angle CAE,$$

在 $\triangle AB'E$ 和 $\triangle ACE$ 中,

$$\begin{cases} AB' = AC \\ \angle B'AE = \angle CAE, \\ AE = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AB'E \cong \triangle ACE(\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle AB'E = \angle C = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle DB'E = \angle AB'D + \angle AB'E = 40^\circ + 40^\circ = 80^\circ,$$

设 $\angle BAD = \alpha,$

①当 $ED = EB'$ 时,

$$\angle EDB' = \angle DB'E = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle B + \angle BAD = 40^\circ + \alpha,$$

$$\therefore \angle ADB' = \angle ADE + \angle EDB' = 120^\circ + \alpha,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ADB' = 120^\circ + \alpha,$$

$$\therefore \angle ADB + \angle ADE = 180^\circ,$$

$$\therefore 120^\circ + \alpha + 40^\circ + \alpha = 180^\circ,$$

$$\therefore \alpha = 10^\circ;$$

② $B'D = B'E$ 时,

$$\therefore \angle B'DE = \frac{180^\circ - \angle EB'D}{2} = 50^\circ ,$$

$$\therefore \angle ADE = 40^\circ + \alpha ,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ADB' = \angle ADE + B'DE = 90^\circ + \alpha ,$$

$$\therefore \angle ADB + \angle ADE = 180^\circ ,$$

$$\therefore 90^\circ + \alpha + 40^\circ + \alpha = 180^\circ ,$$

$$\therefore \alpha = 25^\circ ;$$

③当 $DB' = DE$ 时 ,

$$\angle B'DE = 180^\circ - 80^\circ \times 2 = 20^\circ ,$$

$$\angle ADE = 40^\circ + \alpha ,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ADB' = 60^\circ + \alpha ,$$

$$\therefore \angle ADB + \angle ADE = 180^\circ ,$$

$$\therefore 60^\circ + \alpha + 40^\circ + \alpha = 180^\circ ,$$

$$\therefore \alpha = 40^\circ .$$

综上 $\angle BAD = 10^\circ$ 或 25° 或 40° .

故答案为： 10° 或 25° 或 40° .

【标注】【知识点】角的和差的计算与证明-不需要分类讨论